Tentamen Vectoranalyse

21 januari 2008, 14:00-17:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+5+10 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^4 + y^4 + z^4 - z = 2.$$

1. Bereken het raakvlak aan S in $p_0 = (1,1,1)$.
2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van p_0 geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

$$z = g(x,y),$$

   met $g(1,1) = 1$.
3. Toon aan dat S in de buurt van p_0 onder zijn raakvlak in p_0 ligt. (Opmerking: je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is.)

Opgave 2 (10+15 pt.)
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie zijn, en laat $z = g(x,y)$. Via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ wordt z een functie van (r,θ).

1. Druk de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ uit in $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.
2. Toon vervolgens aan dat

$$x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = r^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

Z.O.Z.

Opgave 3 (20 pt.)
Gegeven is het punt $p = (0, 0, z_0)$, met $z_0 > 0$, en het oppervlak met vergelijking

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \text{ met } 0 < a < b.$$

Bepaal de kortste afstand van p tot een punt van dit oppervlak.

Aanwijzing: introduceer de functie die elk punt van het oppervlak afbeeldt op het kwadraat van zijn afstand tot p.

Opgave 4 (6+14 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{x}{r^2} - 6\,x)\,\mathbf{i} + \frac{y}{r^2}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r^2}\,\mathbf{k},$$

waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. C en C' zijn C^1-krommen in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ van $(1, 0, 0)$ naar $(0, 0, 1)$. Toon aan dat

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

2. Bereken

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Uitwerkingen

Opgave 1. 1. $\nabla f(p_0) = (4,4,3)^T$, dus is de vergelijking van het raakvlak in p_0:

$$0 = \nabla f(p_0) \cdot (x-1, y-1, z-1)^T = 4x + 4y + 3z - 11.$$

2. Aangezien $f_z(0,0,0) = 3 \neq 0$, geldt volgens de Impliciete Functiestelling dat er een C^1-functie g is, gedefiniëerd op een omgeving van $(1,1)$, zó dat $g(1,1) = 1$, terwijl $F(x,y,z) = 0$ in de buurt van $(1,1,1)$ als oplossing heeft: $z = g(x,y)$.

3. De vergelijking van het raakvlak in p_0 is $z = h(x,y) := -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{11}{3}$. We moeten nu aantonen dat

$$\varphi(x,y) := h(x,y) - g(x,y) \geq 0, \tag{1}$$

voor (x,y) in een omgeving van (x_0, y_0).

Uit $f(x,y,g(x,y)) = 0$ volgt via impliciet differentiëren:

$$f_x(x,y,g(x,y)) + g_x(x,y)\, f_z(x,y,g(x,y)) = 0, \tag{2}$$
$$f_y(x,y,g(x,y)) + g_y(x,y)\, f_z(x,y,g(x,y)) = 0. \tag{3}$$

Invullen van $(x,y) = (1,1)$ geeft:

$$g_x(1,1) = g_y(1,1) = -\tfrac{4}{3}.$$

Omdat $h_x(1,1) = h_y(1,1) = -\frac{4}{3}$, heeft φ een kritiek punt in $(1,1)$ (zoals te verwachten was). Om de aard van dit kritieke punt na te gaan berekenen we de Hessiaan van φ in $(1,1)$. Welnu, uit (2) en (3) volgt:

$$\begin{aligned} 12x^2 + 12g^2(g_x)^2 - g_{xx} &= 0, \\ 12g^2 g_x g_y - g_{xy} &= 0, \\ 12y^2 + 12g^2(g_y)^2 - g_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$H_\varphi(x_0,y_0) = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = \tfrac{100}{3}\,\tfrac{100}{3} - (\tfrac{64}{3})^2 > 0.$$

Aangezien $\varphi_{xx}(x_0,y_0) > 0$, heeft φ een lokaal minimum in (x_0,y_0). M.a.w., $\varphi(x,y) = h(x,y) - g(x,y) \geq 0$ voor (x,y) in de buurt van (x_0,y_0).

Opgave 2. 1. Toepassen van de kettingregel op $z = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ geeft

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\, \dfrac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta\, \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\, \sin\theta\, \dfrac{\partial g}{\partial x} + r\, \cos\theta\, \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \tag{4}$$

Hierbij moeten de partiële afgeleiden van g geëvalueerd worden in $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, die van z in (r,θ).

Oplossen van $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ uit (4) geeft:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \cos\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \sin\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases} \tag{5}$$

2. Differentiëer linker- en rechterlid van de gelijkheden in (5) naar r onder toepassing van de kettingregel. Dit geeft:

$$\cos\theta\, g_{xx} + \sin\theta\, g_{xy} = \cos\theta\, z_{rr} - \frac{\sin\theta}{r}\, z_{r\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\, z_\theta \tag{6}$$

$$\cos\theta\, g_{xy} + \sin\theta\, g_{yy} = \sin\theta\, z_{rr} + \frac{\cos\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{r^2}\, z_\theta \tag{7}$$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid van (6) met $r^2\cos\theta$ en van (7) met $r^2\sin\theta$, en tel de nieuwe linker-en rechterleden bij elkaar op, dan krijgen we

$$r^2\cos^2\theta\, g_{xx} + 2r^2\cos\theta\,\sin\theta\, g_{xy} + r^2\sin^2\theta\, g_{yy} = r^2\, z_{rr}.$$

Gebruik nu $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ om het gevraagde

Opgave 3.
We introduceren de functie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z - z_0)^2$, en zoeken de minima van f beperkt tot het oppervlak S.

Methode 1. Gebruik Lagrange-multiplicatoren en de gerande Hessiaan. Deze methode is al vele malen uitgewerkt. Ik geef hier een alternatief:

Methode 2. Een parametrisering van S is $(x,y) \mapsto (x, y, \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b})$. Beperkt tot S heeft f dus de vorm

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= f(x, y, \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}) \\ &= x^2 + y^2 + (\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0)^2. \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2\frac{x}{a}\,(a + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2\frac{y}{b}\,(b + \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - z_0) \end{aligned}$$

De kritieke punten van φ zijn dus:

1. $(0,0)$;
2. $(\pm\sqrt{2a(z_0 - a)}, 0)$ als $z_0 \geq a$;
3. $(0, \pm\sqrt{2b(z_0 - b)})$ als $z_0 \geq b$.

Eenvoudig is na te rekenen dat in deze kritieke punten geldt:

1. $(0,0)$ heeft kritieke waarde $\varphi(0,0) = z_0^2$ met $\varphi_{xx} > 0$ en Hessiaan

$$H_\varphi(0,0) = \frac{4}{ab}(a - z_0)(b - z_0) > 0;$$

2. $(\pm\sqrt{2a(z_0 - a}, 0)$ als $z_0 \geq a$ heeft kritieke waarde $a(2z_0 - a)$ met $\varphi_{xx} > 0$ en Hessiaan

$$H_\varphi(0,0) = \frac{8}{ab}(b - a)(z_0 - a) > 0;$$

3. $(0, \pm\sqrt{2b(z_0 - b)})$ als $z_0 \geq b$ heeft kritieke waarde $b(2z_0 - b)$, en Hessiaan

$$H_\varphi(0,0) = \frac{8}{ab}(b - a)(b - z_0) < 0.$$

Conclusie: voor $z_0 \leq a$ is de minimale afstand z_0, aangenomen in het punt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Als $z_0 > a$ dan is de minimale afstand $\sqrt{a(2z_0 - a)}$, aangenomen in de punten $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2a(z_0 - a}, z_0 - a)$.

Toon nog aan dat $f(x, y, g(x, y)) \to \infty$ als $x^2 + y^2 \to \infty$. Hieruit volgt dat de minima globaal (of: absoluut) zijn.

Opgave 4.
1. Eenvoudig is na te gaan dat $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Aangezien $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ enkelvoudig samenhangend is, heeft $\mathbf{F}$ een potentiaalfunctie f, d.w.z., $\nabla f = \mathbf{F}$. Hieruit volgt dat

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(0,0,1) - f(1,0,0).$$

2. Om de functie f te bepalen moeten we oplossen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r^2} - 6x \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r^2} \tag{10}$$

Uit (8) leiden we af

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 + g(y, z).$$

M.b.v. (9) en (10) volgt hieruit $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$, dus $g(y, z) = c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$. Samenvattend:

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 + c.$$

Dus:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(0,0,1) - f(1,0,0) = 3.$$